Standardisierte kompetenzorientierte
schriftliche Reifeprüfung

AHS

28. September 2017

Mathematik

Teil-2-Aufgaben

Korrekturheft

BMB
Bundesministerium
für Bildung

Aufgabe 1

Aktivität und Altersbestimmung

a) **Lösungserwartung:**

Mögliche Vorgehensweise:

$A(t) = |N'(t)| = \lambda \cdot N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t}$
$A_0 = \lambda \cdot N_0$

$N_0 = \frac{A_0}{\lambda} = \frac{17}{4{,}92 \cdot 10^{-18}} \approx 3{,}46 \cdot 10^{18}$

Zum Zeitpunkt $t = 0$ befinden sich ca. $3{,}46 \cdot 10^{18}$ Atomkerne von ^{238}U in der Probe.

Lösungsschlüssel:

– Ein Punkt für eine korrekte Formel. Äquivalente Formeln sind als richtig zu werten.
– Ein Punkt für die richtige Lösung.
Toleranzintervall: [$3{,}4 \cdot 10^{18}$ Atomkerne; $3{,}5 \cdot 10^{18}$ Atomkerne]

b) **Lösungserwartung:**

Mögliche Vorgehensweise:

lebender Organismus: $A_0 = 25 \cdot 0{,}267 = 6{,}675$ Bq für 25 g Kohlenstoff
$4 = 6{,}675 \cdot e^{-1{,}21 \cdot 10^{-4} \cdot t}$
$t \approx 4\,232$ Jahre

Mögliche Vorgehensweise:

τ ... Halbwertszeit
$\frac{N_0}{2} = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot \tau}$
$\ln(2) = \lambda \cdot \tau$
$\tau = \frac{\ln(2)}{\lambda} \approx 5\,730$

Zum Zeitpunkt des Fundes sind weniger als die Hälfte der ursprünglich vorhandenen Atomkerne zerfallen, da die Halbwertszeit von ^{14}C ca. 5 730 Jahre beträgt, das Holz aber erst vor ca. 4 232 Jahren abgestorben ist.

Lösungsschlüssel:

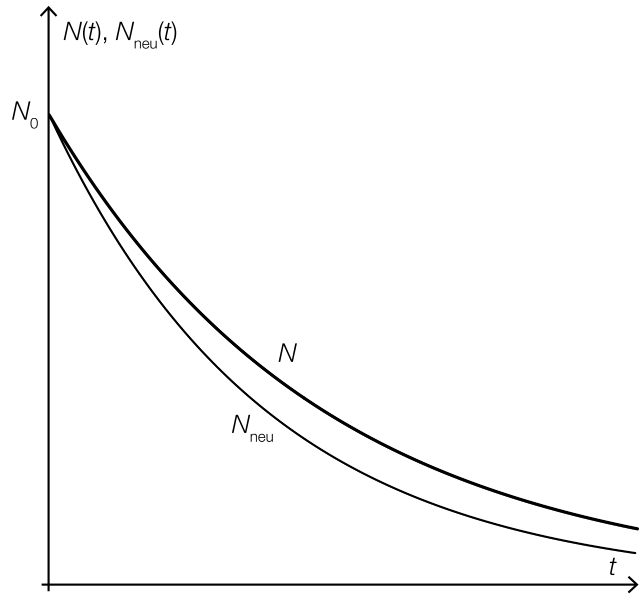
– Ein Punkt für die richtige Lösung.
Toleranzintervall: [4 225 Jahre; 4 240 Jahre]
Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.
– Ein Punkt für eine (sinngemäß) korrekte Begründung dafür, dass weniger als die Hälfte der ursprünglich vorhandenen ^{14}C-Atomkerne zerfallen sind. Andere korrekte Begründungen (z. B. über das Absinken der Aktivität) sind ebenfalls als richtig zu werten.

c) Lösungserwartung:

Mögliche Vorgehensweise:

$$\frac{1}{2} = \frac{N(\tau)}{N_0} = \frac{N_0 \cdot 0{,}5^{\frac{\tau}{c}}}{N_0} = 0{,}5^{\frac{\tau}{c}} \iff \frac{\tau}{c} = 1 \iff \tau = c$$

Die Konstante c entspricht der Halbwertszeit eines radioaktiven Stoffes.



Lösungsschlüssel:

– Ein Ausgleichspunkt für die Angabe des richtigen Zusammenhangs.
– Ein Punkt für das Einzeichnen eines korrekten Verlaufs des Graphen einer möglichen Funktion N_{neu}. Der skizzierte Graph muss den Punkt $(0|N_0)$ enthalten, zwischen dem Graphen der Funktion N und der Zeitachse liegen und als Graph einer (streng) monoton fallenden linksgekrümmten Funktion erkennbar sein.

Aufgabe 2

Schwimmzonen

a) Lösungserwartung:

$A(x) = x \cdot (180 - 2 \cdot x) = 180 \cdot x - 2 \cdot x^2$

Mögliche Vorgehensweise:

$A'(x) = 180 - 4 \cdot x = 0 \;\Rightarrow\; x = 45$
($A''(45) = -4 < 0 \;\Rightarrow\;$ lokales Maximum
Aus $A''(x) < 0$ für alle x folgt, dass A rechtsgekrümmt ist und das lokale Maximum daher ein globales Maximum ist.)

Länge = 90 m
Breite = 45 m
Flächeninhalt = 4 050 m^2

Lösungsschlüssel:

- Ein Ausgleichspunkt für einen korrekten Nachweis. Andere korrekte Nachweise sind ebenfalls als richtig zu werten.
- Ein Punkt für die Angabe aller drei richtigen Werte. Der Nachweis für das Vorliegen eines Maximums ist nicht erforderlich.

b) Lösungserwartung:

alle Werte, die x bei h = 40 m annehmen darf: $x \in [40; 90]$
alle Werte, die h bei x = 50 m annehmen darf: $h \in [0; 50]$

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für die Angabe eines korrekten Intervalls für x.
  Andere Schreibweisen des Intervalls (offen oder halboffen) sowie korrekte formale oder verbale Beschreibungen sind ebenfalls als richtig zu werten.
- Ein Punkt für die Angabe eines korrekten Intervalls für h.
  Andere Schreibweisen des Intervalls (offen oder halboffen) sowie korrekte formale oder verbale Beschreibungen sind ebenfalls als richtig zu werten.

c) Lösungserwartung:

$A(\alpha) = 3600 \cdot \cos(\alpha) + 3600 \cdot \cos(\alpha) \cdot \sin(\alpha)$

oder:

$A(\alpha) = 3600 \cdot \cos(\alpha) + 1800 \cdot \sin(2 \cdot \alpha)$

Mögliche Vorgehensweise:

größtmöglicher Flächeninhalt: bei $\alpha = 30°$
$30 + 60 + 30 = 120$
Der Strandabschnitt ist dabei 120 m lang.

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für eine korrekte Formel. Andere korrekte Formeln sind ebenfalls als richtig zu werten.
- Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei die Einheit „m" nicht angeführt sein muss. Toleranzintervall: [115 m; 125 m]

Aufgabe 3

Brasilien

a) Lösungserwartung:

Im Zeitintervall [1970; 1980] steigt die Einwohnerzahl pro Jahr um ca. 2,515 %, im Zeitintervall [1991; 2000] steigt die Einwohnerzahl pro Jahr um ca. 1,607 %.

Damit eine Beschreibung durch eine Exponentialfunktion angemessen ist, müsste die relative jährliche Zunahme der Einwohnerzahl in den beiden betrachteten Zeitintervallen annähernd gleich sein. Im Zeitintervall [1970; 1980] ist die relative jährliche Zunahme der Einwohnerzahl mit ca. 2,5 % deutlich größer als im Zeitintervall [1991; 2000], wo es nur mehr ca. 1,6 % beträgt. Daher wäre eine Beschreibung der Entwicklung der Einwohnerzahl durch eine Exponentialfunktion nicht angemessen.

Lösungsschlüssel:

– Ein Ausgleichspunkt für eine (sinngemäß) korrekte Deutung der beiden Werte.
– Ein Punkt für eine (sinngemäß) korrekte Begründung.

b) Lösungserwartung:

Mögliche Vorgehensweise:

$f(t) = 146\,917\,459 + k \cdot t$

$k = \frac{190\,755\,799 - 146\,917\,459}{19} \approx 2\,307\,281$

$f(t) = 146\,917\,459 + 2\,307\,281 \cdot t$

Mögliche Vorgehensweise:

$f(23) = 199\,984\,922$

$\frac{199\,984\,922}{202\,740\,000} \approx 0{,}986$

Die Abweichung zur Vorhersage beträgt ca. 1,4 %.

Lösungsschlüssel:

– Ein Punkt für eine korrekte Funktionsgleichung. Äquivalente Funktionsgleichungen sind als richtig zu werten.
  Toleranzintervall für k: [2305000; 2310000]
– Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei die Abweichung auch als negativer Wert angegeben sein kann.
  Toleranzintervall: [1 %; 2 %] bzw. [0,01; 0,02]

c) Lösungserwartung:

Mögliche Deutung:

Der angeführte Ausdruck gibt die Anzahl derjenigen Personen an, die die Einwohnerzahl x_n im Zeitintervall $[n; n + 1]$ aufgrund von Geburten und/oder Todesfällen erhöhen (bzw. verringern).

Mögliche Vorgehensweise:

$x_{2015} \leq 1{,}01 \cdot x_{2014}$

$x_{2014} + x_{2014} \cdot \frac{14{,}6 - 6{,}6}{1\,000} + m_{2014} \leq 1{,}01 \cdot x_{2014}$

daher

$m_{2014} \leq \left(1{,}01 - 1 - \frac{14{,}6 - 6{,}6}{1\,000}\right) \cdot x_{2014}$

$m_{2014} \leq 0{,}002 \cdot 202\,740\,000 = 405\,480$

Damit die Einwohnerzahl im Jahr 2015 gegenüber der Einwohnerzahl im Jahr davor maximal um 1 % größer wird, dürfen höchstens 405 480 Personen mehr zuwandern als abwandern.

Lösungsschlüssel:

– Ein Punkt für eine korrekte Deutung.
– Ein Punkt für die richtige Lösung.
  Toleranzintervall: [405 000 Personen; 406 000 Personen]
  Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.

Aufgabe 4

Wachstumskurve von Kindern

a) Lösungserwartung:

Stichprobenanteil: 0,9
Anteil laut Diagramm: 0,94
Unterschied: 4 Prozentpunkte

Mögliche Berechnung:
$0{,}9465 = 0{,}9 + 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{0{,}9 \cdot (1 - 0{,}9)}{n}} \Rightarrow n \approx 160$ Buben

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für die richtige Lösung.
- Ein Punkt für die richtige Lösung.
  Toleranzintervall: [155 Buben; 165 Buben]
  Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.

b) Lösungserwartung:

Die durchschnittliche Wachstumsgeschwindigkeit in diesem Zeitraum entspricht einem Drittel der Größenzunahme.

oder:

$\frac{g(9) - g(6)}{3}$

Das ungefähre Alter von Buben, bei dem deren momentane Wachstumsgeschwindigkeit am größten ist, liegt bei ca. 13 Jahren.

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für eine (sinngemäß) korrekte Antwort bzw. eine richtige Formel. Äquivalente Formeln sind als richtig zu werten.
- Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei die Einheit „Jahre" nicht angeführt sein muss.
  Toleranzintervall: [12 Jahre; 14 Jahre]

c) Lösungserwartung:

Die statistische Kennzahl, die demjenigen Wert entspricht, den man auf dem 50. Perzentil ablesen kann, ist der Median.

Die Schwierigkeiten bestehen darin, dass man zwar das 1. und das 3. Quartil sowie den Median, jedoch weder Minimum noch Maximum ablesen kann (und auch keine Informationen bezüglich Ausreißern hat).

Lösungsschlüssel:

– Ein Ausgleichspunkt für das Anführen der korrekten statistischen Kennzahl.
– Ein Punkt für eine (sinngemäß) korrekte Erläuterung.